Chap10 Graphs

Jin-Hui Wu

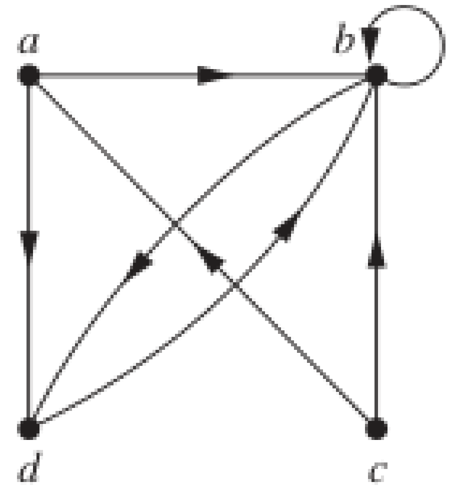
2026-04-23

大纲

- ❑ 图的基本概念 (10.1)
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图

图

- 图 (graph)
  - 图 G =（V, E）由顶点集V和边集E构成，每条边有一个或两个顶点与它相连
  - 例：关系的图表示

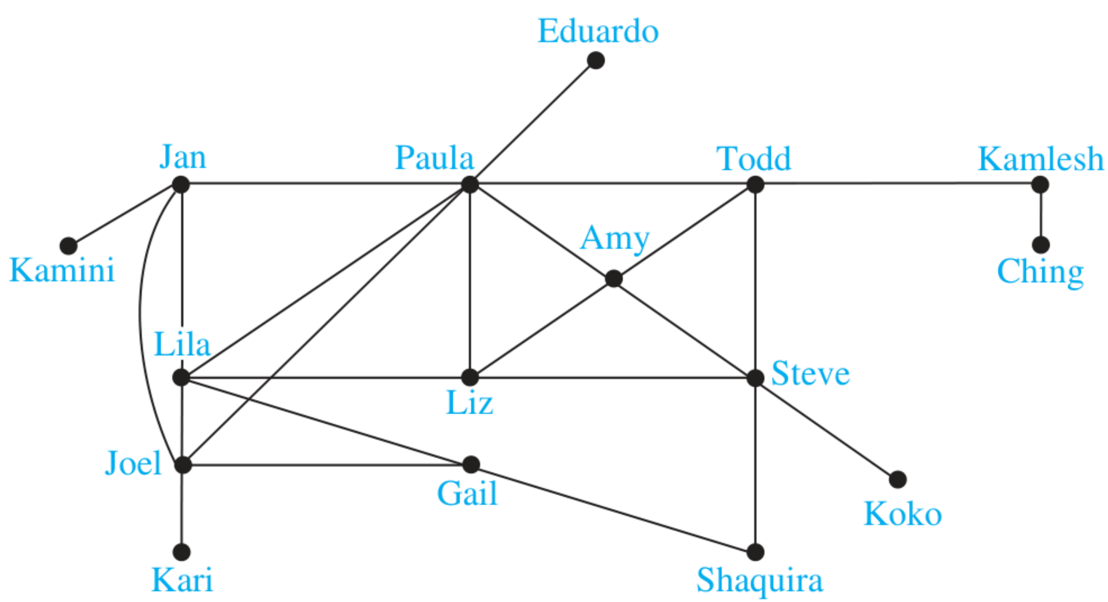


图

- 图 (graph)
  - 图 G = （V, E）由顶点集V和边集E构成，每条边有一个或两个顶点与它相连
- Graph
  - 图论：顶点和边构成图
  - 函数：函数图像

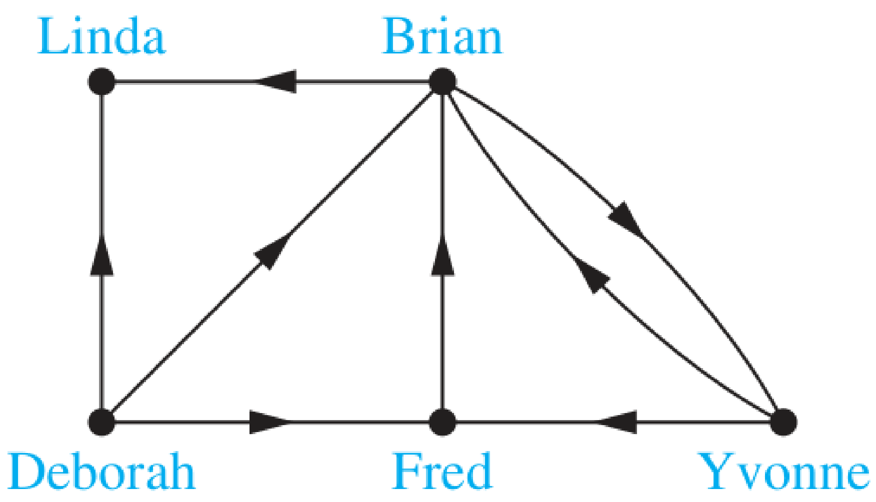
图的应用

- 朋友关系图
  - 朋友关系是双向的
  - 可用无向图 (undirected graph)
  - 也称作简单图 (simple graph)



图的应用

- 影响图
  - 描述一个人是否能够影响另一个人人的思维
  - 影响是单向的
  - 可以用有向图 (directed graph)

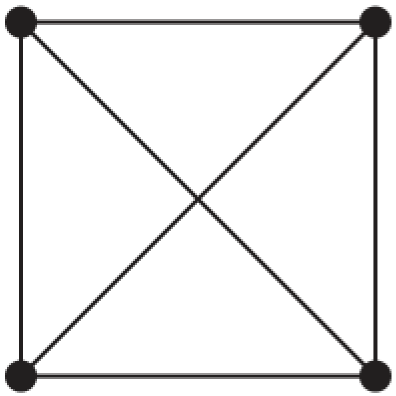


大纲

- 图的基本概念
- 握手定理 (10.2)
- 二分图与匹配
- 图表示与图同构
- 连通性
- 欧拉图与哈密顿图
- 最短路问题
- 平面图

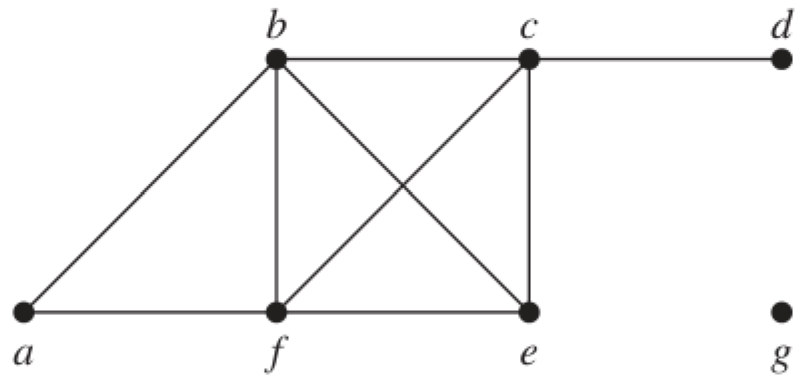
握手定理

- 握手定理 (handshaking theorem)
  - 1边连接2顶点
  - 边数 = 2倍顶点连接数



握手定理

- 握手定理 (handshaking theorem)
  - 度 (degree)
    - 无向图中，顶点的度是与该顶点相关联的边的数目
    - 顶点上的环为顶点的度做出双倍支献
    - 顶点v的度表示成deg(v)



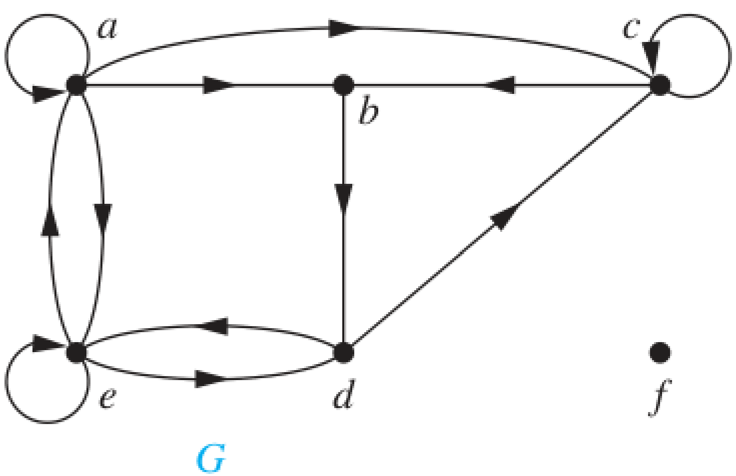
握手定理

- 握手定理 (handshaking theorem)
  - 度 (degree)
    - 无向图中，顶点的度是与该顶点相关联的边的数目
    - 顶点上的环为顶点的度做出双倍支献
    - 顶点v的度表示成deg(v)
  - 无向图的握手定理
    - G =（V, E）是无向图，则

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

握手定理

- 有向图的握手定理
  - 入度 (in-degree)
    - 顶点v的入度是以v作为终点的边数，记作$\deg^{-}(v)$
  - 出度 (out-degree)
    - 顶点v的出度是以v作为起点的边数，记作$\deg^{+}(v)$



握手定理

- 有向图的握手定理
  - 入度 (in-degree)
    - 顶点v的入度是以v作为终点的边数，记作$\deg^{-}(v)$
  - 出度 (out-degree)
    - 顶点v的出度是以v作为起点的边数，记作$\deg^{+}(v)$

  - 有向图的握手定理
    - G = (V, E) 是有向图，则

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v)$$

例

- 有10个顶点且每个顶点的度都为6的图有_____条边

例

- 判断下述图是否存在
  - 有5个顶点，且每个顶点度为3

大纲

- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配 (10.2)
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图

二分图

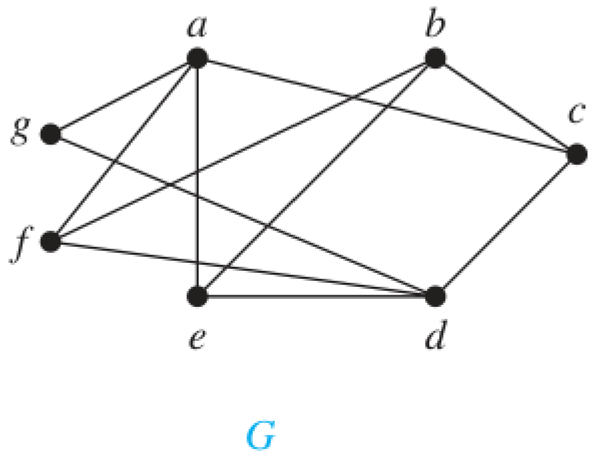
- 二分图 (bipartite graph)
  - 顶点集可以分成两个不相交的非空集合V_1和V_2，且每条边都连接V_1与V_2的简单图
  - (V_1, V_2)为一个二部划分 (bipartition)

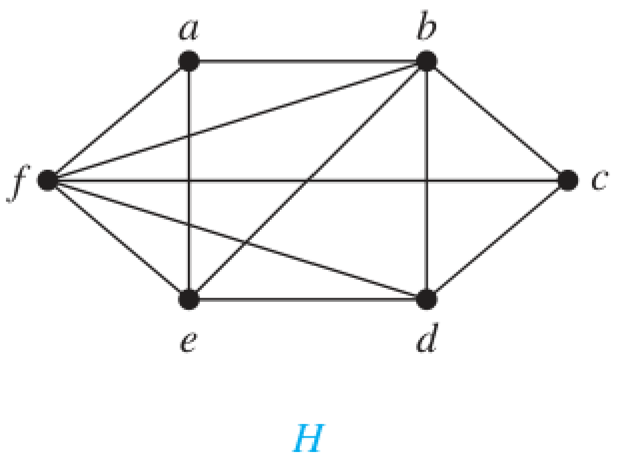
二分图

- 二分图 (bipartite graph)
  - 顶点集可以分成两个不相交的非空集合V_1和V_2，且每条边都连接V_1与V_2的简单图
  - (V_1, V_2)为一个二部划分 (bipartition)
  - 例
    - 圈图 (cycle) C_4是二分图
    - 圈图C_3不是二分图

二分图的判断

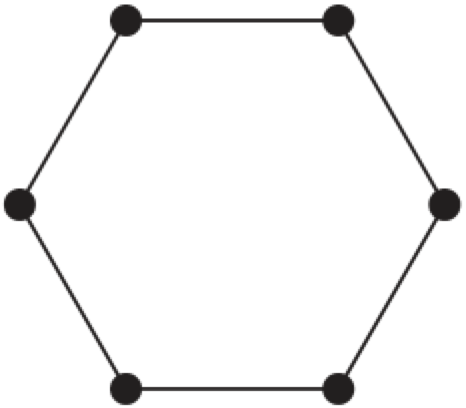
- 双色染色
  - 用两种颜色对顶点染色，相邻顶点颜色不同





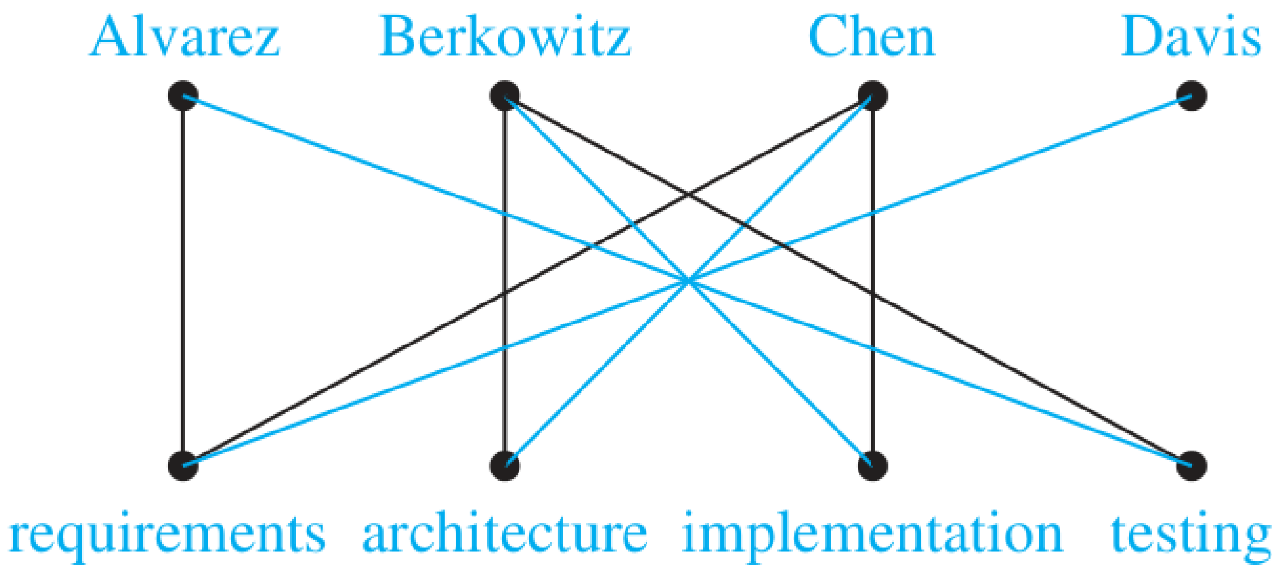
匹配

- 匹配 (matching)
  - G=(V,E)为简单图
  - 匹配是没有公共顶点的边的集合



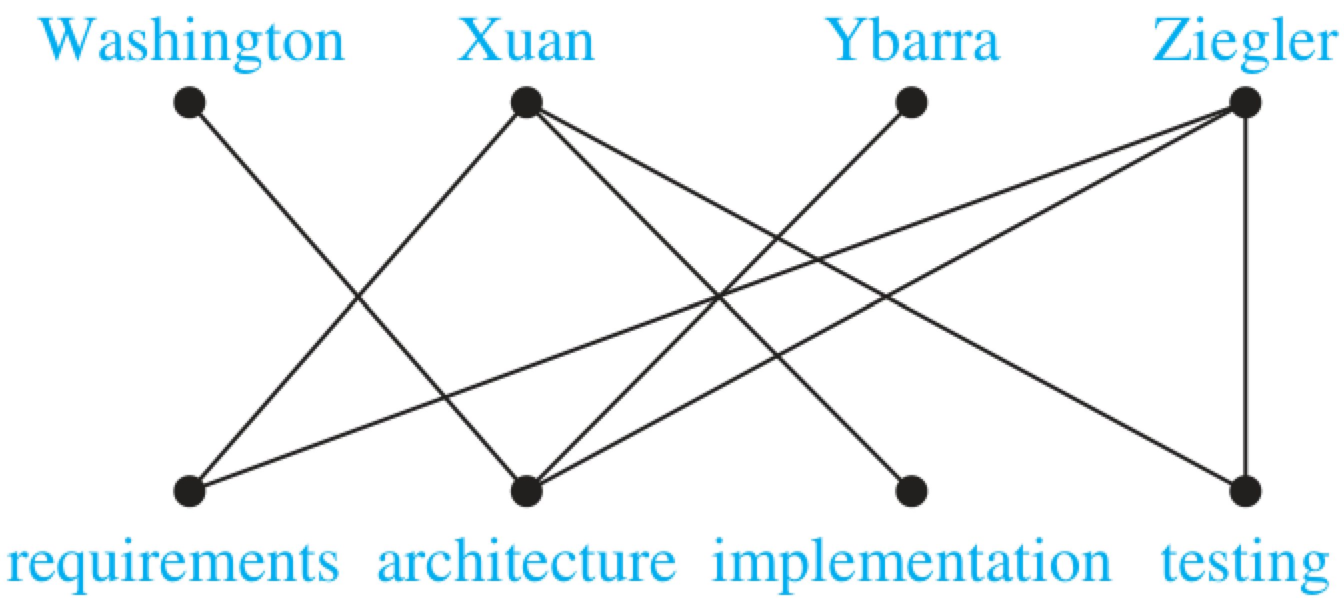
例：任务分配

- 边：该员工可以完成该任务
- 目标：每人负责一项任务



例：任务分配

- 边：该员工可以完成该任务
- 目标：每人负责一项任务



大纲

- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构 (10.3)
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图

图表示

- 邻接表 (Adjacency List)
  - 列出每个顶点相邻的顶点

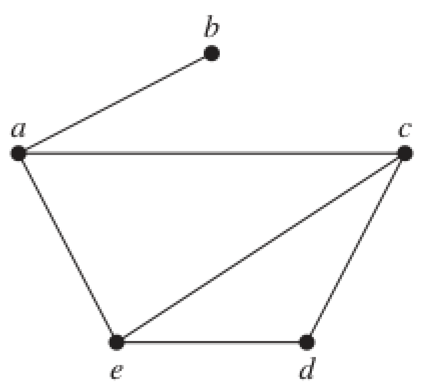


FIGURE 1 A simple graph.

TABLE 1 An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

图表示

- 邻接表 (Adjacency List)
  - 列出每个顶点相邻的顶点

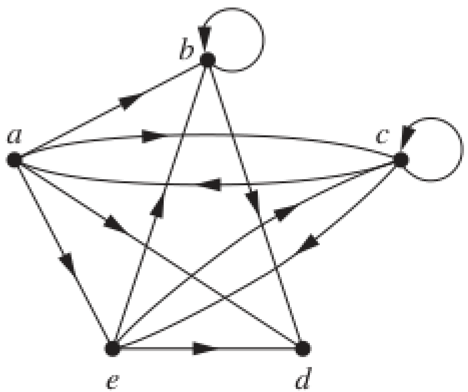


FIGURE 2 **A directed graph.**

TABLE 2 An Adjacency List for a Directed Graph.

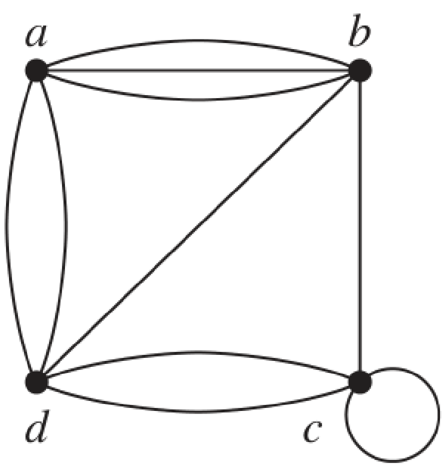
Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

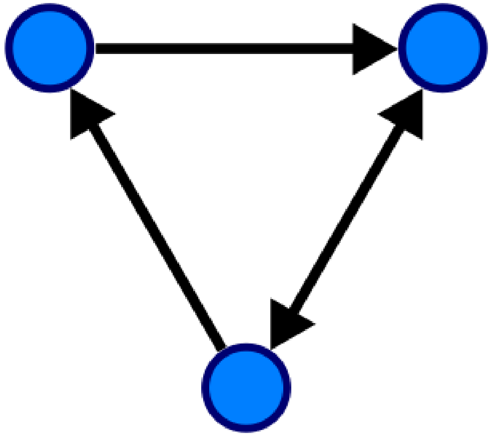
图表示

- 邻接矩阵 (Adjacency Matrix)
  - 用矩阵$A \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$表示顶点间连接关系
    - 0： 无边
    - k： 有k条边

图表示

- 写出下图的邻接矩阵
  - 用矩阵$A \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$表示顶点间连接关系
    - 0：无边
    - k：有k条边



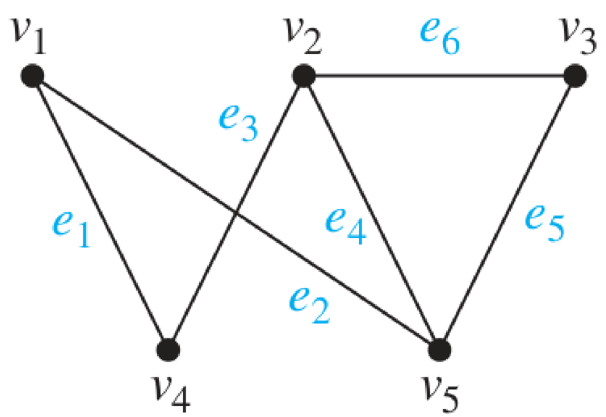


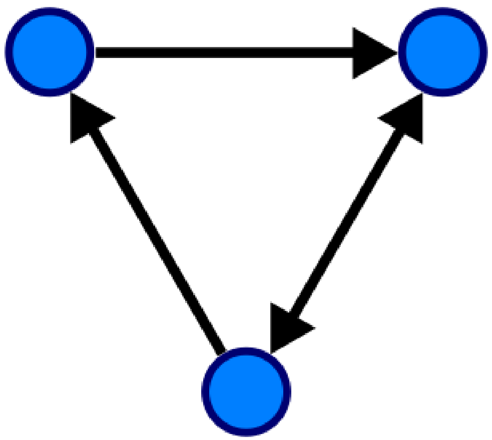
图表示

- 关联矩阵 (Incidence Matrix)
  - 用矩阵$M \in \mathbb{R}^{|V| \times |E|}$表示顶点与边的关联关系
    - 0：不关联
    - 1：关联

图表示

- 写出下图的关联矩阵
  - 用矩阵$M \in \mathbb{R}^{|V|\times|E|}$表示顶点与边的关联关系
    - 0：不关联
    - 1：关联



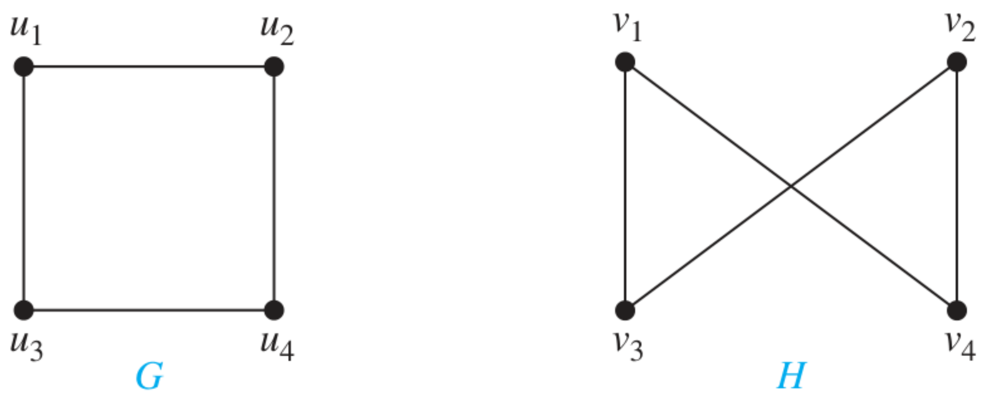


图同构

- 图同构 (Isomorphism of Graphs)
  - $G_1 = (V_1, E_1)$和$G_2 = (V_2, E_2)$是简单图，且存在函数f满足：
    - $f: V_1 \to V_2$是双射
    - $(a, b) \in E_1 \Leftrightarrow \big(f(a), f(b)\big) \in E_2$
  - 更改顶点序号后，两张图是同一张图

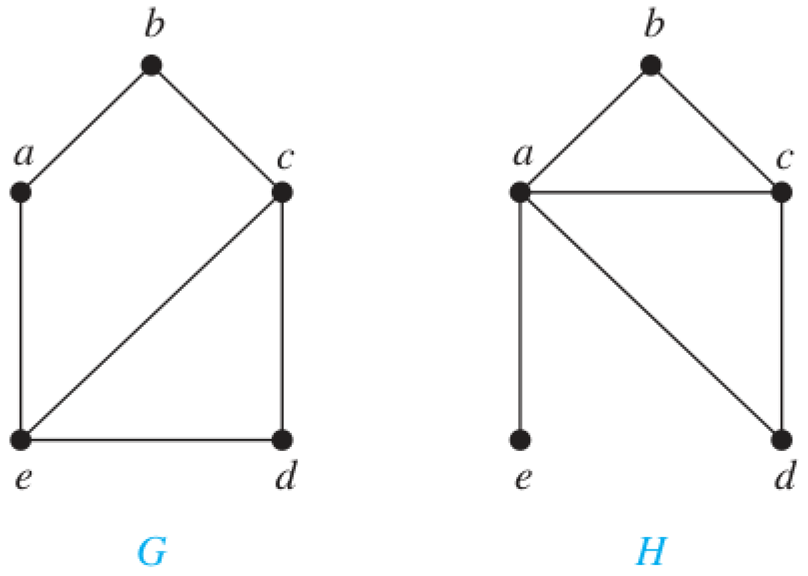
图同构

- 判断下列两图是否是同构的
  - $G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$是简单图，且存在函数f满足：
    - $f: V_1 \to V_2$是双射
    - $(a,b)\in E_1 \Leftrightarrow \big(f(a),f(b)\big)\in E_2$



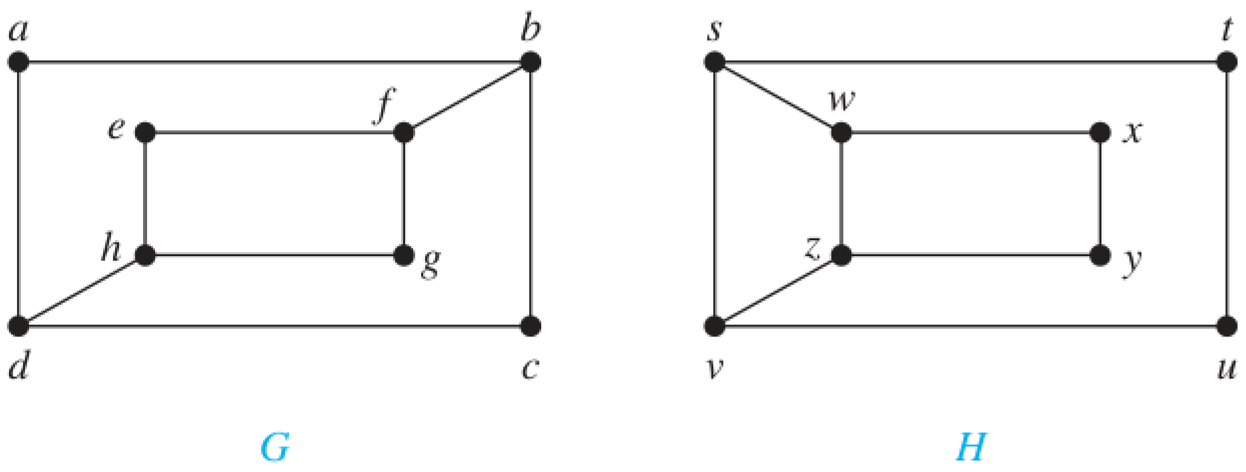
图同构

- 图同构的性质
  - 顶点数和边数相同
  - 具有相同的度序列
    - 度序列：所有顶点的度构成的单调增序列



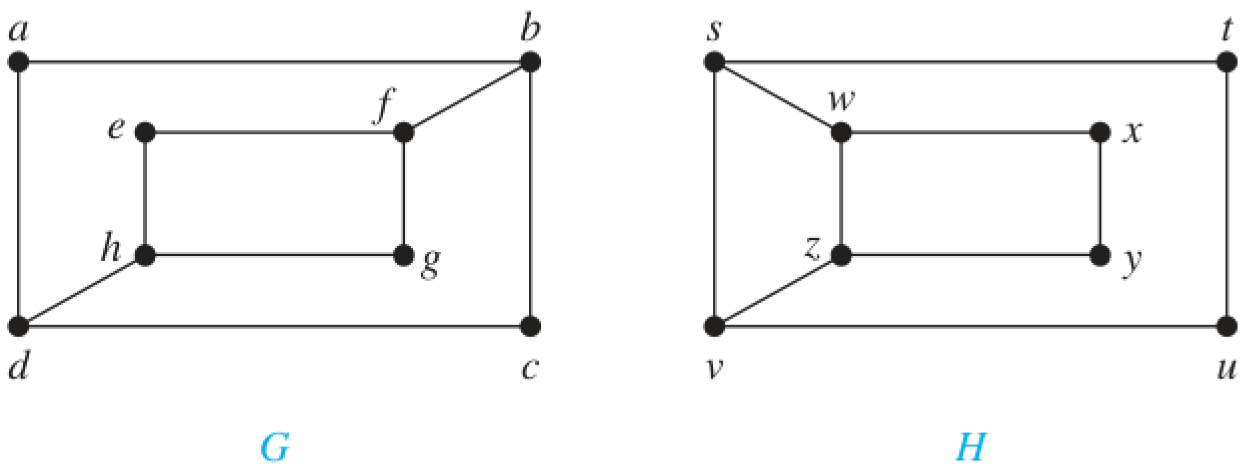
图同构

- 图同构的性质
  - 映射前后两顶点的相邻顶点集具有相同的度序列



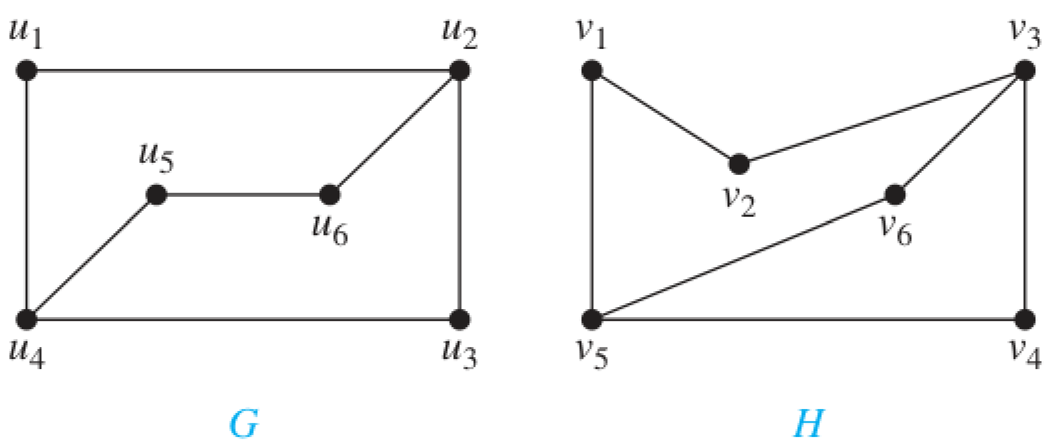
图同构

- 图同构的性质
  - 具有相同的子图结构



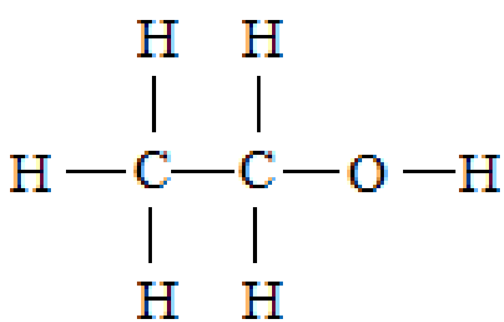
图同构

- 图同构的性质
  - 邻接矩阵更改行列编号后一致

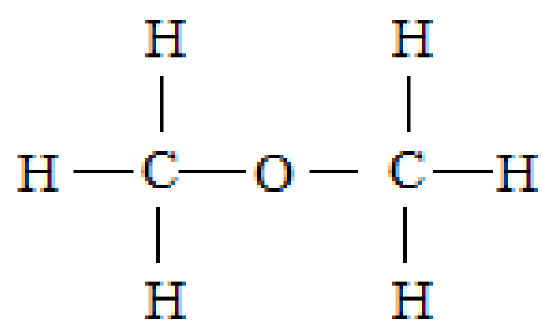


图同构

- 图同构的应用
  - 判断分子式相同的两个分子是否是同分异构体
    - 顶点：原子
    - 边：化学键



乙醇



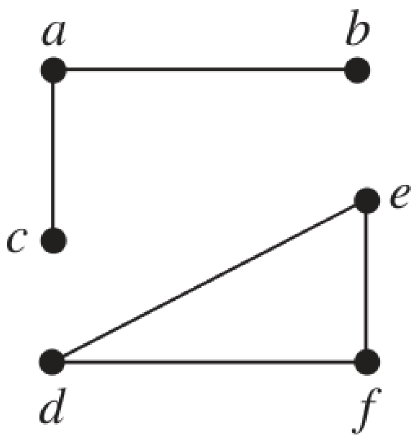
甲醚

大纲

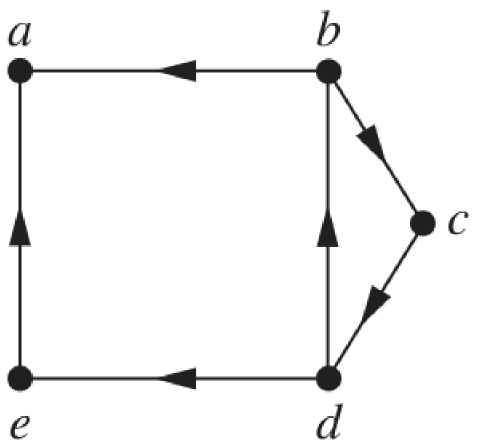
- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性 (10.4)
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图

连通性

- 连通性 (connectedness)
  - 顶点间连通性：存在一条从u到v的路径
    - 无向图：u和v是连通的
    - 有向图：u和v是单向连通的



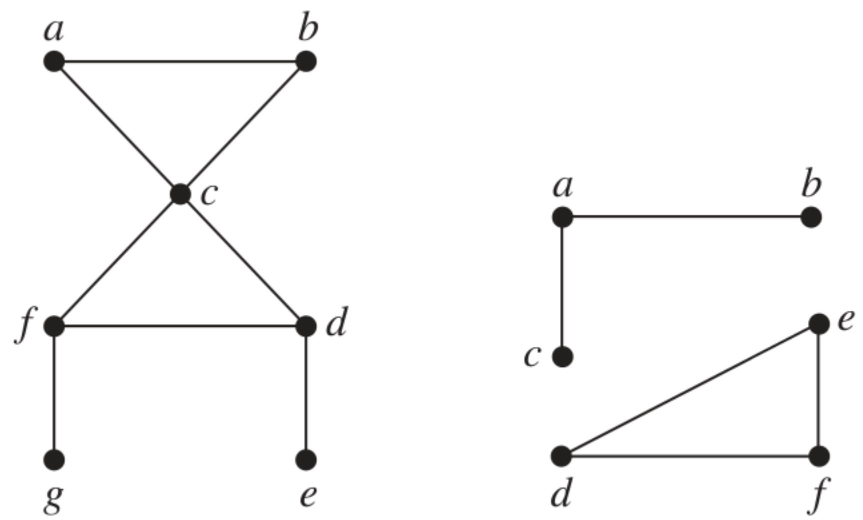
G_2



H

连通性

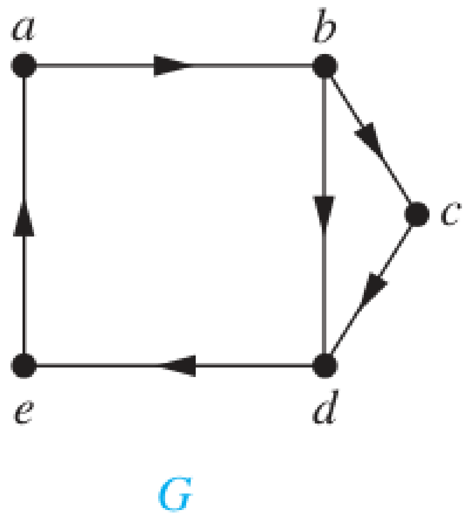
- 连通性 (connectedness)
  - 无向图的连通性
    - 任意两个顶点都是连通的

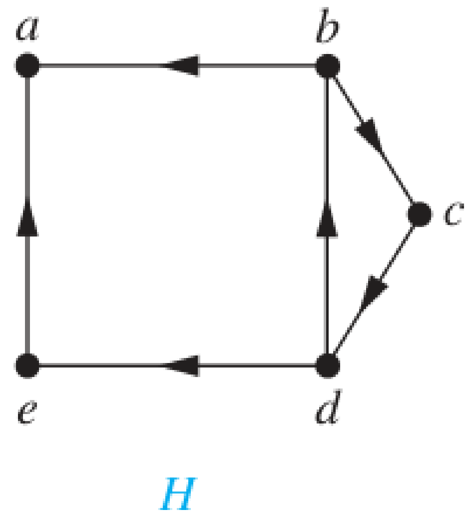


G_1　　G_2

连通性

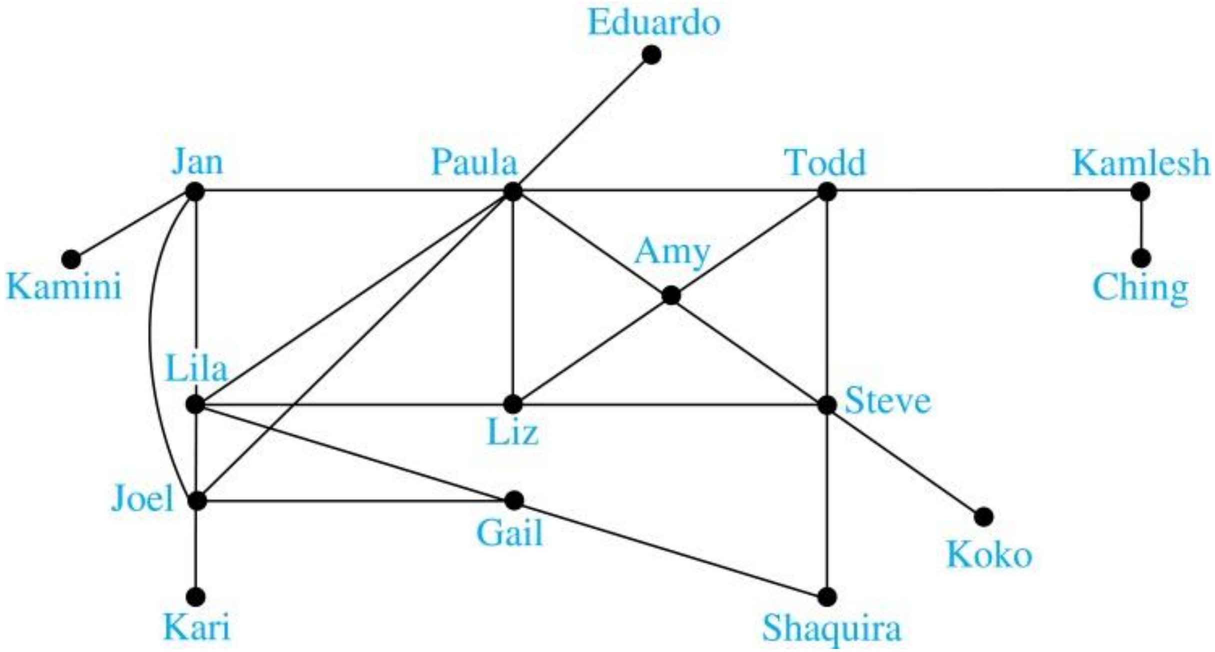
- 连通性 (connectedness)
  - 有向图的连通性
    - 强连通：任意两个顶点都是双向连通的
    - 弱连通：去掉方向后是连通的无向图





连通性

- 连通性的应用
  - 熟人图
    - 顶点：人
    - 边：两人相熟

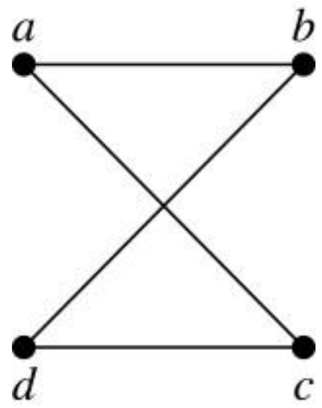


连通性

- 顶点间通路数
  - 通路 (walk)
    - 顶点和边交替构成的序列，边连接两侧顶点

连通性

- 顶点间通路数
  - 通路 (walk)
    - 顶点和边交替构成的序列，边连接两侧顶点
  - 邻接矩阵与通路数
    - $(A^r)_{ij}$是从顶点i到j的通路数



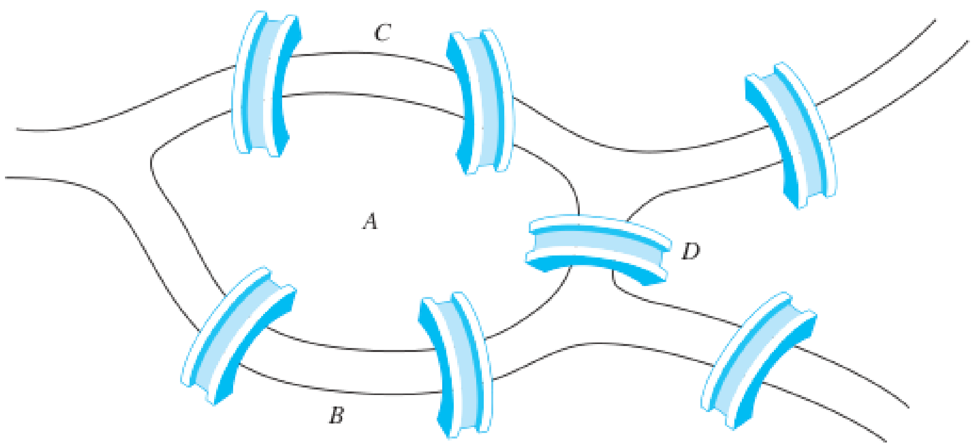
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

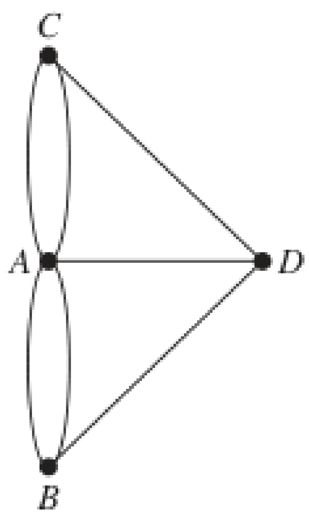
大纲

- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图 (10.5)
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图

欧拉图

- 哥尼斯堡七桥问题
  - 是否可能从镇里的某个位置出发不重复地经过所有桥并且返回出发点





欧拉图

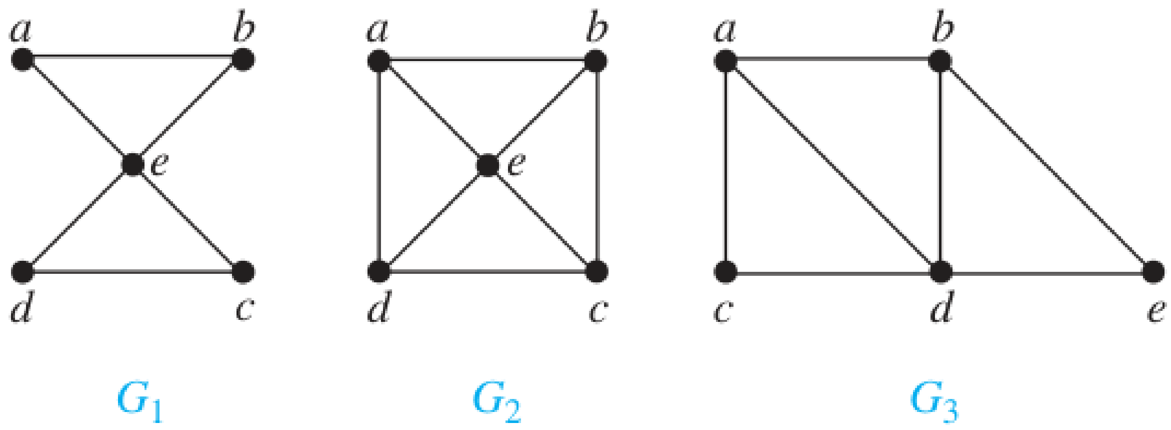
- 欧拉通路 (Euler path)
  - 包含图的每一条边的简单通路
    - 简单通路：没有重复顶点的通路
  - 包含欧拉通路的图称为半欧拉图

欧拉图

- 欧拉通路 (Euler path)
  - 包含图的每一条边的简单通路
    - 简单通路：没有重复顶点的通路
  - 包含欧拉通路的图称为半欧拉图
- 欧拉回路 (Euler circuit)
  - 包含图的每一条边的简单回路
    - 简单回路：起点终点相同且没有其他重复顶点的通路
  - 包含欧拉回路的图称为欧拉图

例

- 判断下列各图是否包含欧拉通路/回路



- 欧拉通路：包含图的每一条边的简单通路
- 欧拉回路：包含图的每一条边的简单回路

欧拉图

- 欧拉图的判断
  - 欧拉通路
    - 当且仅当连通且恰有两个顶点度为奇数
  - 欧拉回路
    - 当且仅当连通且所有顶点度为偶数

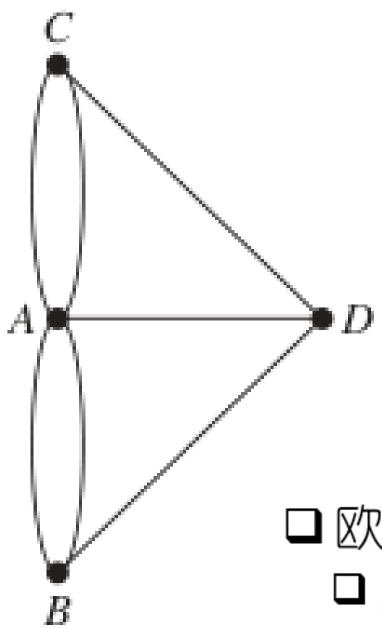
欧拉图

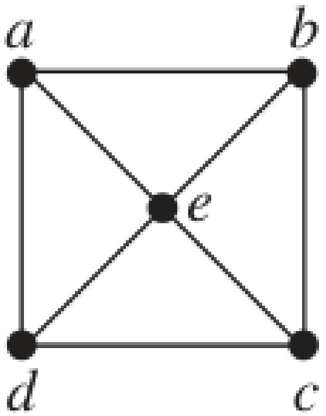
❑ 欧拉回路构造算法

```
procedure Euler(G: connected multigraph with all vertices of even degree)
circuit := a circuit in G beginning at an arbitrarily chosen vertex with edges
            successively  added to form a path that returns to this vertex.
 H := G with the edges of this circuit removed
 while H  has edges
     subciruit  := a circuit in H beginning at a vertex in H that also is
                   an endpoint of an edge in circuit.
     H := H with edges of subciruit and all isolated vertices removed
     circuit := circuit with subcircuit inserted at the appropriate vertex.
return circuit{circuit is an Euler circuit}
```

例

- 判断下列各图是否含有欧拉回路/通路





G_2

- 欧拉通路
  - 当且仅当连通且恰有两个顶点度为奇数

- 欧拉回路
  - 当且仅当连通且所有顶点度为偶数

哈密顿图

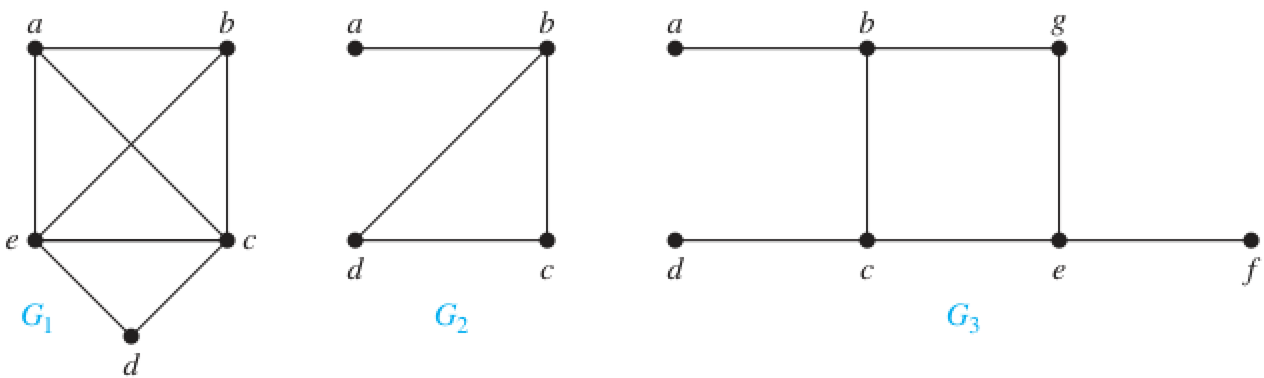
- 欧拉图：每条边一次
- 哈密顿图：每个顶点一次

- 哈密顿通路 (Hamilton path)
  - 包含图的每个顶点的简单通路 → 半哈密顿图

- 哈密顿回路 (Hamilton circuit)
  - 包含图的每个顶点的简单回路 → 哈密顿图

例

- 判断下列各图是否包含哈密顿通路/回路



- 哈密顿通路：包含图的每个顶点的简单通路
- 哈密顿回路：包含图的每个顶点的简单回路

哈密顿图

- 哈密顿图的判断
  - 没有简单的充要条件
  - Theorems 3 & 4, P.736

DIRAC'S THEOREM If G is a simple graph with n vertices with $n \geq 3$ such that the degree of every vertex in G is at least $n/2$, then G has a Hamilton circuit.

ORE'S THEOREM If G is a simple graph with n vertices with $n \geq 3$ such that $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ for every pair of nonadjacent vertices u and v in G, then G has a Hamilton circuit.

哈密顿图

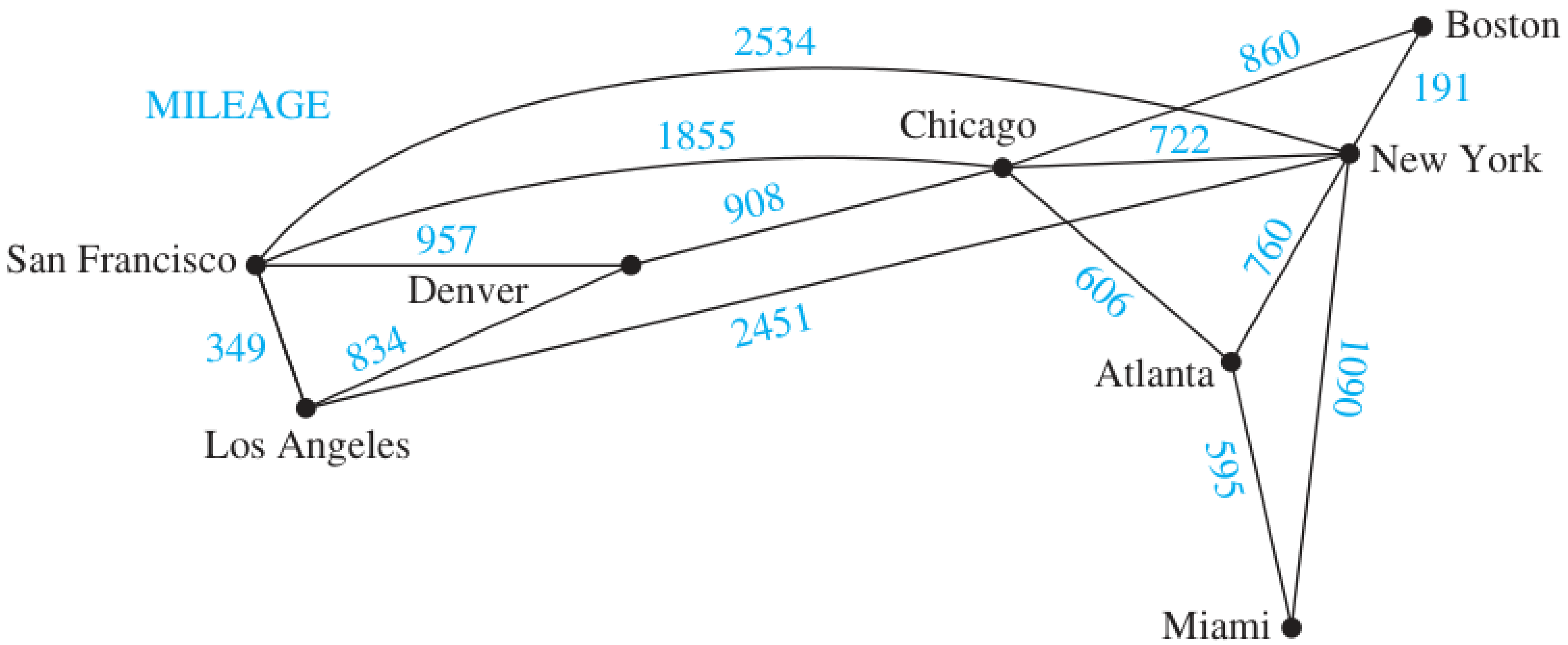
- 哈密顿图的应用
  - 外卖员尽快送完所有外卖
  - 快递员送完所有快递并回到快递站
  - 旅行者参观完所有景点后回到酒店
  - ……

大纲

- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题 (10.6)
- ❑ 平面图

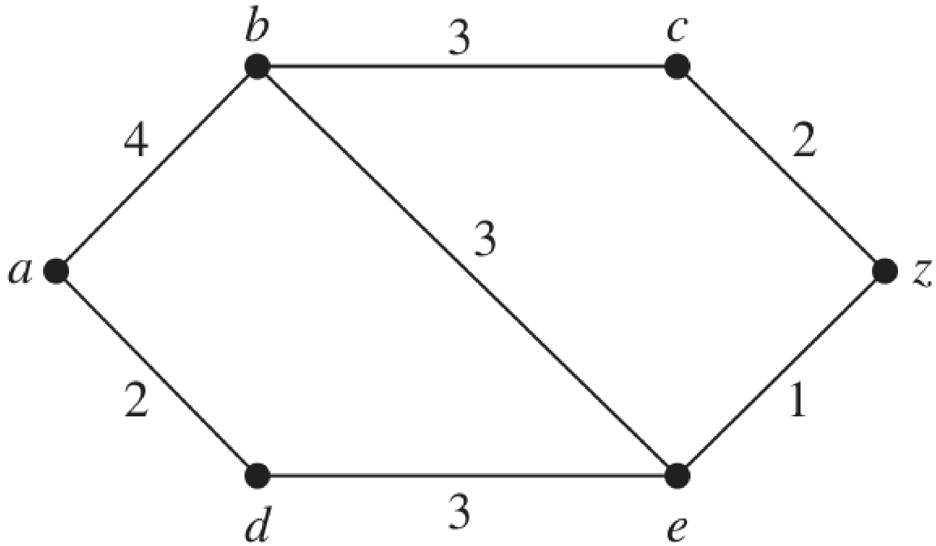
最短路问题

- 最短路 (shortest path)
  - 带权图中从某个顶点出发，计算到达其他顶点的最短距离



例

- 计算从a出发，到其他顶点的最短路
  - 思路：由近到远找出最短路



最短路问题

ALGORITHM 1 Dijkstra's Algorithm.

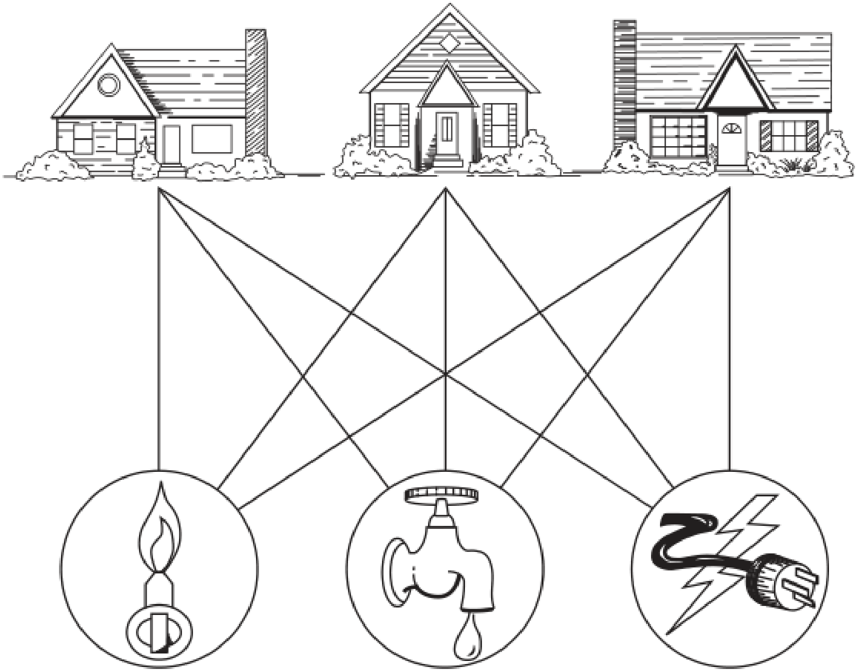
procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
  $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
  $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
  $S := S \cup \{u\}$
  for all vertices v not in S
    if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
    {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
    labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}

大纲

- ❑ 图的基本概念
- ❑ 握手定理
- ❑ 二分图与匹配
- ❑ 图表示与图同构
- ❑ 连通性
- ❑ 欧拉图与哈密顿图
- ❑ 最短路问题
- ❑ 平面图 (10.7)

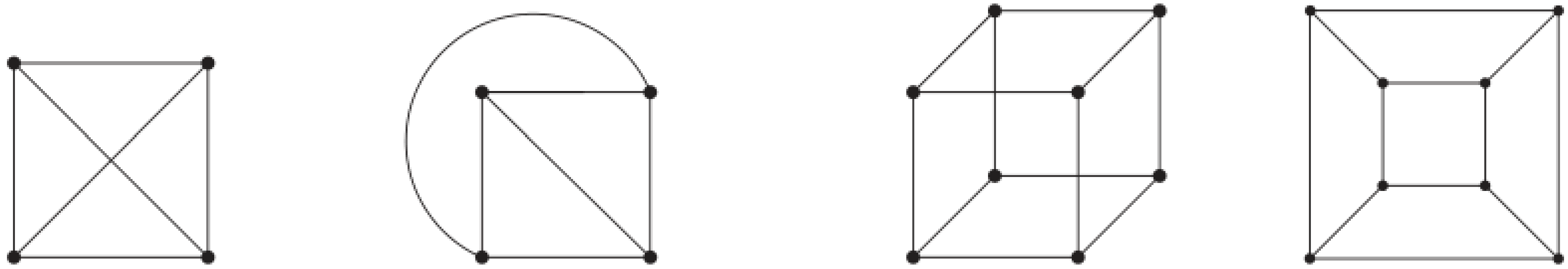
平面图

- 房屋排线
  - 3个房屋均需通水电燃气，是否能使管道在平面内不交叉



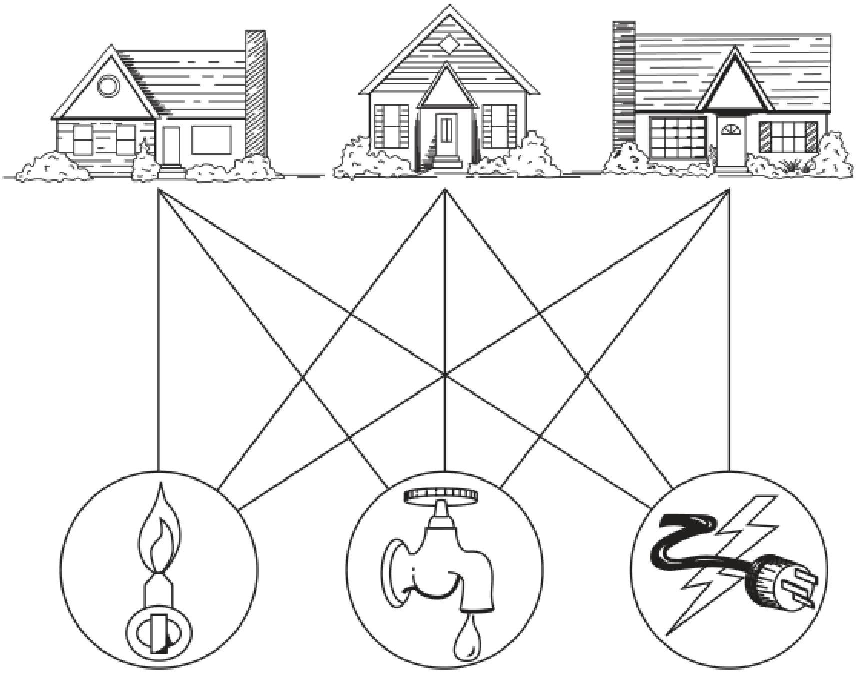
平面图

- 平面图 (planar graph)
  - 可以在平面中画出，且没有边交叉的图



例

- 证明$K_{3,3}$不是平面图

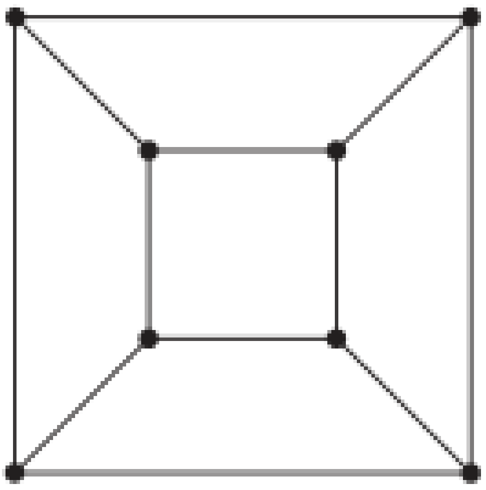


平面图

- 欧拉公式 (Euler's formula)
  - 平面图满足：

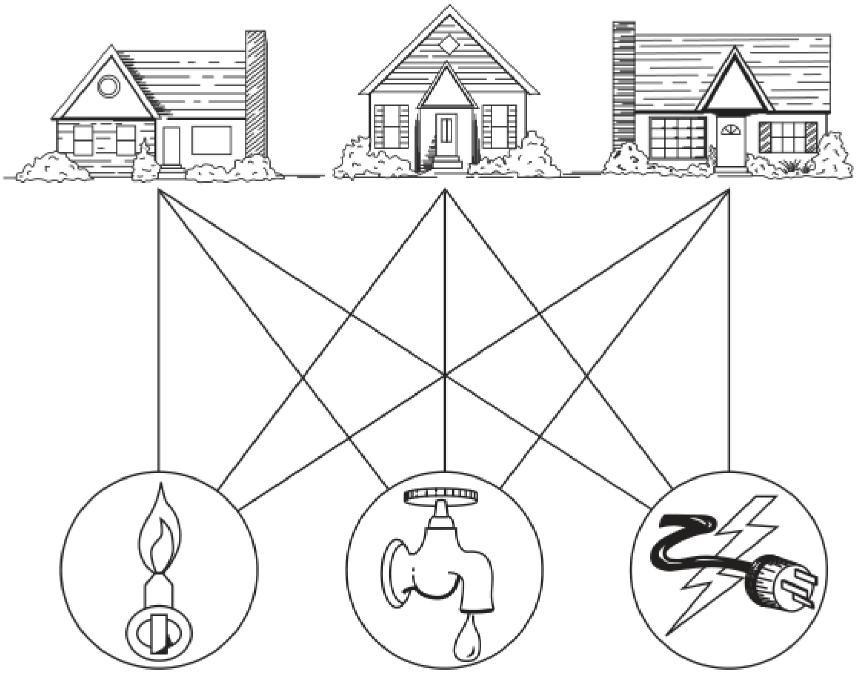
$$r - e + v = 2$$

    - r：面的个数
    - e：边的个数
    - v：顶点个数



例

- 利用欧拉公式证明$K_{3,3}$不是平面图



总结

- 图的基本概念
- 握手定理
  - 判断图是否存在
- 二分图与匹配
- 图表示与图同构
  - 邻接表、邻接矩阵、关联矩阵
- 连通性
- 欧拉图与哈密顿图
- 最短路问题
- 平面图